PREFAZIONE

Il terzo e ultimo volume di *Sulle Orme di Euclide* è dedicato alla teoria delle proporzioni e similitudine, e alle problematiche collegate con la determinazione dell'area del cerchio. Dal punto di vista epistemologico e concettuale si tratta di due temi di estrema importanza. Il concetto elementare di proporzione come uguaglianza tra rapporti numerici, infatti, che a noi oggi appare così immediato, talmente semplice da costituire parte del bagaglio di conoscenze matematiche di base nella scuola secondaria di primo grado, si fonda sulla possibilità di associare un numero (la misura) ad ogni grandezza. Ma questo non è sempre possibile a meno che non si tenga conto anche dei valori irrazionali, una acquisizione che mancava alla matematica greca. Così ad esempio, se una coppia di grandezze coinvolta in una proporzione è composta dalla diagonale e dal lato di un quadrato, non possiamo usare la definizione elementare di proporzione come uguaglianza di rapporti, semplicemente perché in quel caso un rapporto non esiste (bisognerà aspettare infatti una definizione rigorosa di numero irrazionale in termini di coppie di classi contigue). E tuttavia non per questo si è costretti a rinunciare a un concetto potente e fecondo come quello di proporzione, ma si può aggirare il problema adottando una definizione di proporzione sicuramente più complicata, ma equivalente a quella elementare e che fa uso solo di rapporti razionali: la quinta definizione del quinto libro degli *Elementi*, cioè la definizione di Eudosso.

Ancora più ricche di implicazioni concettuali sono le problematiche legate alla determinazione dell'area del cerchio. La seconda parte di questo volume è sostanzialmente dedicata a un unico teorema, una imponente costruzione logica dal profondo valore estetico: la seconda proposizione del dodicesimo libro degli *Elementi*. In essa non viene toccato il problema pratico della determinazione del pi greco (il primo che si dedicò con successo a questo problema ottenendo una buona approssimazione di π fu Archimede), ma solo si mostra la proporzionalità tra l'area del cerchio e il quadrato del raggio, senza dire nulla sul valore della costante di tale proporzionalità (appunto, π). Il nodo concettuale ruota qui intorno all'idea di infinito. Infatti la prima proposizione del dodicesimo libro stabilisce la proporzionalità tra l'area di poligoni simili e i quadrati dei raggi dei cerchi circoscritti. È significativo che nel suo commento agli *Elementi* Girolamo Saccheri sostenga l'inutilità della XII, 2 in quanto si può sfruttare il risultato della proposizione precedente considerando il cerchio come un poligono con infiniti lati. Un simile commento tradisce una visione dell'infinito attuale mentre, come abbiamo avuto modo più volte di osservare, il pensiero greco non contempla l'infinito se non in termini di potenzialità, per cui la differenza tra un cerchio e un poligono con moltissimi lati è qualitativa (cosa che comunque non impedisce ad Archimede di valutare una approssimazione di π operando su un poligono di 96 lati, ma si tratta appunto di una approssimazione).

PARTE I

LA SIMILITUDINE

LEZIONE 1

GRANDEZZE, RAPPORTI, MISURE

1.1 Grandezze geometriche

I concetti di "grandezza" e di "misura" appartengono all'esperienza quotidiana. Detto in termini molto semplici, misurare una grandezza significa andare a vedere quante volte una seconda grandezza "entra" nella prima. Affinché sia possibile operare un confronto bisogna che le due grandezze siano dello stesso tipo, ovverosia *omogenee*. Risulta pertanto chiaro che non tutti gli enti geometrici sono grandezze. Ad esempio, i punti non possono essere confrontati uno con l'altro e non si possono quindi qualificare come grandezze. Per i segmenti invece l'operazione è possibile. Anche le superfici sono grandezze, sebbene il confronto non sia immediato come per i segmenti ma richieda l'applicazione di un certo numero di teoremi.

1.1.1 Classi di grandezze

Possiamo rendere rigorose tutte queste considerazioni introducendo il concetto di *classe di grandezze*. Una classe di grandezze è un insieme in cui sono definite:

1. una relazione di **confronto**, cioè dati due qualsiasi elementi dell'insieme è sempre possibile stabilire se il pri-

mo è maggiore del secondo, o il secondo maggiore del primo, o se sono uguali;

2. una operazione di **somma**, in modo che il risultato di tale operazione sia ancora un ente della classe e che siano rispettate le usuali proprietà della somma tra numeri (in particolare le proprietà associativa e commutativa).

I segmenti, ad esempio, costituiscono una classe di grandezze, in quanto dati due segmenti è sempre possibile stabilire se sono uguali o, in caso contrario, quale dei due è maggiore; inoltre anche la somma di segmenti è definita.

1.1.2 Multipli e sottomultipli di grandezze

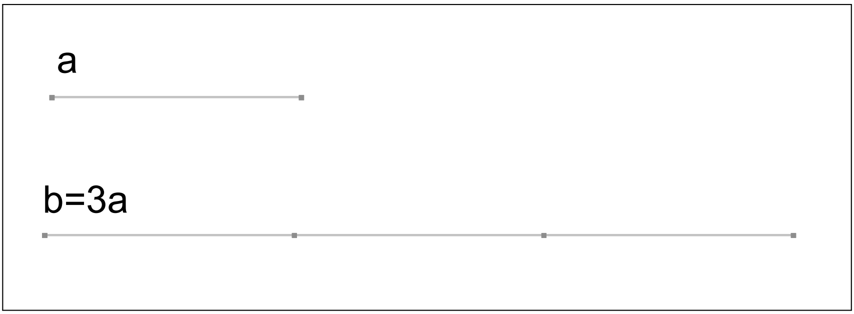

Figura 1: Multiplo e sottomultiplo di un segmento.

Quando ad essere sommata è la stessa grandezza presa più volte, si avrà un *multiplo* di tale grandezza. Così, ad esempio, se riportiamo per tre volte un segmento a consecutivamente sulla stessa retta otterremo un segmento b triplo di a, e scriveremo: $b = 3a$. Analogamente diremo che a è un *sottomultiplo* di b secondo il fattore 3 e scriveremo: $a = \frac{1}{3}b$. Diremo anche che 3 è il *rapporto* tra b e a. Più in generale, quando una grandezza è un multiplo di un sottomultiplo dell'altra, il rapporto tra le due grandezze sarà espresso da una frazione (ad esempio, se c è il triplo della metà di a, scriveremo: $c = \frac{3}{2}a$).

Vi è però da aggiungere che questa definizione di rapporto tra grandezze non è quella originale di Euclide (la terza del quinto libro degli *Elementi*), la quale – in maniera molto più generica – afferma solamente che: **rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità**.

1.1.3 Postulato di Archimede

Gli enti geometrici che considereremo grandezze devono sottostare ad un altro ulteriore vincolo, vale a dire il *postulato di Archimede*, secondo il quale **date due grandezze appartenenti alla stessa classe, la prima minore della seconda e non nulla, si può sempre trovare un multiplo della prima che supera la seconda**.

L'enunciato di questo importante postulato lo ritroviamo negli *Elementi* come definizione, precisamente la IV del V libro che recita: **si dice che hanno tra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente**.

Può sembrare strano che vi sia necessità di specificare una proprietà così ovvia. In realtà abbiamo un esempio di

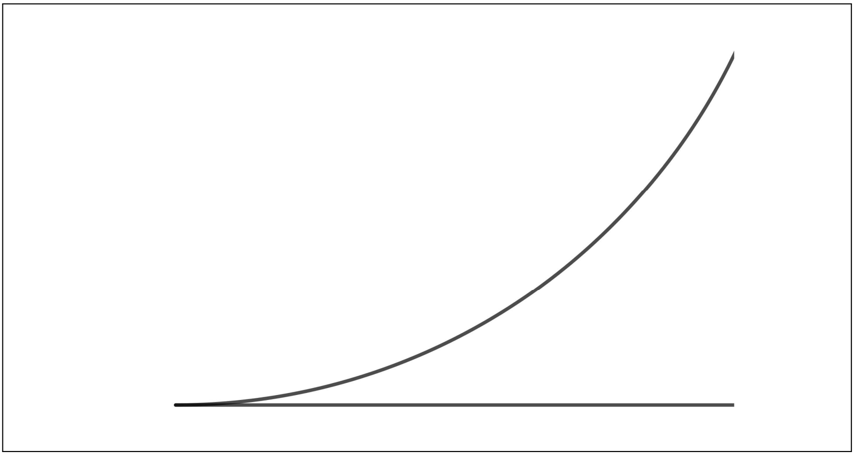

Figura 2: Angolo di contingenza.

grandezze che non obbediscono al postulato di Archimede negli angoli curvilinei, cioè quelli in cui almeno un lato è una linea curva. Si può infatti dimostrare (proposizione 16 del terzo libro degli *Elementi*) che non esiste alcun sottomultiplo di un angolo rettilineo che sia minore dell'angolo di contingenza (cioè dell'angolo curvilineo compreso tra il cerchio e la tangente), vale a dire interamente contenuto in esso.

Quindi, gli angoli – sia rettilinei che curvilinei – sono grandezze per le quali non vale la proprietà archimedea, e pertanto non si possono costruire rapporti tra di esse. Non così per la classe dei soli angoli rettilinei.

1.2 Grandezze incommensurabili

Date due qualsiasi grandezze omogenee, non è sempre possibile trovare una frazione che esprima il rapporto tra di esse. Quando ciò si verifica parleremo di grandezze tra loro *incommensurabili*. Per dimostrare l'esistenza di tali grandezze è sufficiente far vedere che almeno in un caso particolare il rapporto tra due segmenti non può essere espresso da una frazione. Abbiamo dunque il seguente teorema:

> **La diagonale e il lato del quadrato sono segmenti incommensurabili**

Questo teorema è una applicazione della proposizione 9 del X libro degli *Elementi*, la quale stabilisce che la condizione necessaria e sufficiente affinché due segmenti siano commensurabili è il fatto che il rapporto tra i quadrati costruiti su di essi sia una frazione in cui il numeratore e il denominatore sono due numeri quadrati (si noti la sottile differenza tra il rapporto tra grandezze omogenee – le superfici dei quadrati – e il quoziente tra numeri interi "quadrati", dati cioè dal prodotto di un numero intero per se stesso). Tale proposizione è molto importante, troviamo traccia di essa nel dialogo platonico *Teeteto* e negli *Analitici Primi* di Aristotele, dove viene citata come esempio di dimostrazione per assurdo.

Facendo riferimento alla figura 3, consideriamo quindi il triangolo rettangolo isoscele ottenuto dividendo a metà un quadrato per mezzo della sua diagonale. Supponiamo per assurdo che il lato del quadrato a e la diagonale d siano