PREFAZIONE

Il nostro viaggio negli *Elementi* prosegue con lo studio delle proprietà della circonferenza e dell'equivalenza tra poligoni. Le questioni relative alla superficie dei poligoni occupano parte del primo (il teorema di Pitagora e il suo inverso sono le ultime due proposizioni del libro) e il secondo libro (un libro molto breve, di sole quattordici proposizioni). Alla circonferenza è invece interamente dedicato il terzo libro mentre il quarto tratta dei poligoni inscritti o circoscritti a un cerchio (e consta esclusivamente di costruzioni con riga e compasso). Mentre i teoremi di tutti i libri dal secondo in poi fanno massicciamente uso dei risultati dimostrati nel primo libro, alcuni argomenti sono praticamente indipendenti l'uno dall'altro, come è appunto il caso dei due ambiti affrontati in questo secondo volume. Per questo motivo si è optato per una suddivisione del volume in due parti. Addirittura, nella usuale pratica didattica e nella maggioranza dei testi di geometria per le scuole superiori (e anche qui useremo lo stesso ordine di presentazione), la circonferenza viene introdotta prima dell'equivalenza, in maniera inversa rispetto agli *Elementi*, senza che questo pregiudichi la coerenza logica del sistema.

Come già si è avuto modo di osservare nel caso dei poligoni, anche nell'ambito delle figure equivalenti e della circonferenza sorgono alcuni interessanti aspetti concettuali che si distaccano dalla matematica moderna. Ad esempio, il fatto che Euclide non usi due termini distinti per uguaglianza ed equivalenza, ma chiami uguali figure che noi chiameremmo equivalenti e stabilisca l'uguaglianza tra poligoni (come nei criteri di uguaglianza dei triangoli) verificando l'uguaglianza elemento per elemento. Venendo invece alla circonferenza, l'aspetto più interessante è forse quello relativo alla nozione di angolo come parte di piano compresa tra due linee, senza specificare se si tratti di rette o di linee curve. In questa nozione rientra anche l'angolo compreso tra una semicirconferenza e la tangente in uno degli estremi del diametro. Tuttavia, nella proposizione 16 del terzo libro, la quale stabilisce che la retta perpendicolare al diametro in un suo estremo è tangente alla circonferenza, viene anche mostrato come nessun angolo rettilineo (cioè con i lati che sono due semirette) col vertice nel punto di tangenza possa essere interamente interno all'angolo curvilineo formato dalla circonferenza e dalla sua tangente. Questa osservazione – apparentemente di poco conto – è invece fondamentale per riconoscere che la classe più generale degli angoli (rettilinei e curvilinei) non obbedisce al cosiddetto postulato di Archimede, secondo cui date due grandezze esiste sempre un multiplo della minore che supera la maggiore. Questo fatto costringe Euclide, per poter sviluppare la teoria delle proporzioni, a limitare il campo degli angoli ai soli angoli rettilinei, cosa che verrà (implicitamente) stabilita nella definizione 4 del quinto libro.

PARTE I

LA CIRCONFERENZA

LEZIONE 1

CIRCONFERENZE, CORDE, DIAMETRI

1.1 La circonferenza

Il terzo libro degli *Elementi* di Euclide è interamente dedicato alla circonferenza e le sue proprietà. Le principali definizioni riguardanti la circonferenza sono le seguenti (facciamo riferimento alla Figura 1):

1. la circonferenza è una linea tale che tutti i segmenti che hanno un estremo su di essa e l'altro in un determinato punto (detto centro della circonferenza, punto O) sono uguali;
2. il cerchio è la regione di piano delimitata dalla circonferenza, che ne costituisce quindi il contorno;
3. il raggio è un segmento che ha un estremo nel centro e l'altro in un punto della circonferenza (come ad esempio OF);
4. la corda è un segmento avente gli estremi sulla circonferenza (ad esempio EF);
5. il diametro è un segmento avente gli estremi sulla circonferenza e passante per il centro (ad esempio AB);
6. sono uguali i cerchi i cui diametri (o raggi) sono uguali;
7. una retta è tangente a una circonferenza quando la incontra in un solo punto;
8. una retta è secante a una circonferenza quando la incontra in due punti;
9. due circonferenze sono tangenti quando hanno un solo punto in comune;

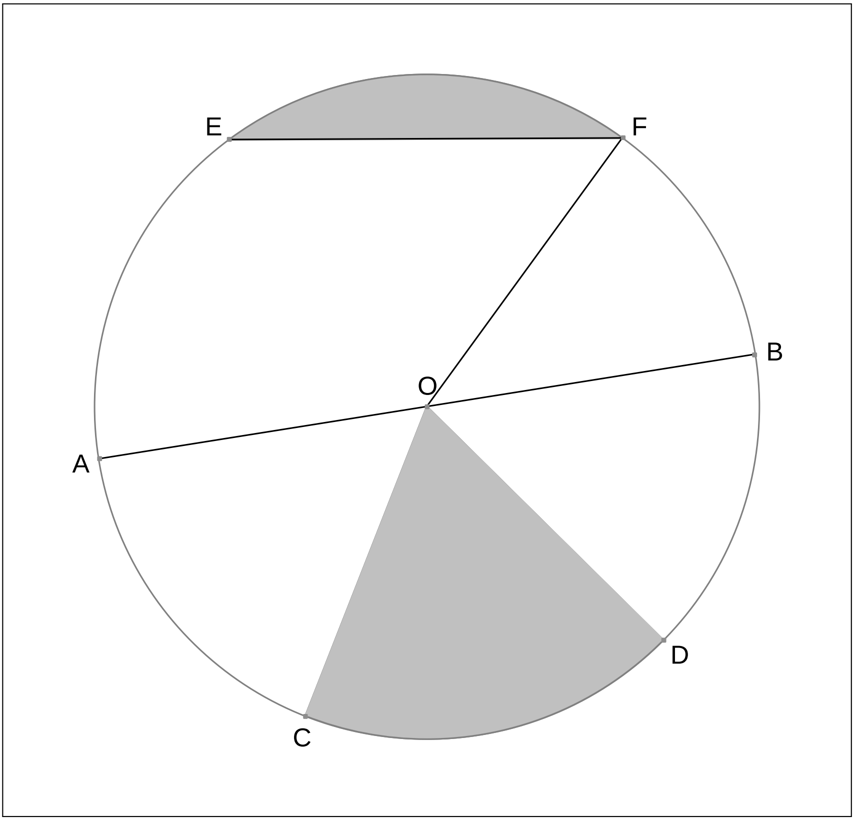

Figura 1: La circonferenza

10. il segmento circolare è una figura delimitata da un arco e dalla corda da questo sottesa (come ad esempio la parte ombreggiata al di sopra della corda EF);
11. la figura delimitata dai due lati di un angolo avente vertice nel centro di un cerchio e dall'arco che tali lati delimitano sulla circonferenza si chiama settore circolare (come la figura ombreggiata COD; osserviamo che una coppia di raggi individua sempre due archi sulla circonferenza, e quindi due settori circolari:

uno corrispondente ad un angolo minore o uguale all'angolo piatto e l'altro corrispondente ad un angolo maggiore o uguale all'angolo piatto);

12. gli estremi di un arco individuano due tipi di angolo: quello che ha il vertice nel centro di un cerchio, che si chiama *angolo al centro*, quello che ha il vertice sulla circonferenza, che si chiama *angolo alla circonferenza*.

1.2 Le prime proprietà

Inizieremo lo studio della circonferenza con alcune semplici costruzioni geometriche per la determinazione del centro di una circonferenza data e della circonferenza dati tre punti di essa; mostreremo inoltre come il cerchio sia una figura convessa.

1.2.1 Determinazione del centro di un cerchio

La prima proposizione del terzo libro degli *Elementi* è una costruzione geometrica volta a trovare il centro di un cerchio; essa infatti recita semplicemente:

Trovare il centro di un cerchio dato

Con riferimento alla Figura 2, in una circonferenza di cui non si conosce il centro tracciamo una qualsiasi corda AB. Costruiamo poi l'asse del segmento AB, che interseca la circonferenza in C e D; il punto medio O del segmento CD è il centro della circonferenza.

Infatti, procediamo per assurdo e supponiamo che il centro della circonferenza non sia O ma un altro punto P interno al cerchio. Uniamo P con gli estremi A e B e con il punto medio M della corda che abbiamo tracciato. I due triangoli che si vengono così a formare (AMP e PMB) so-

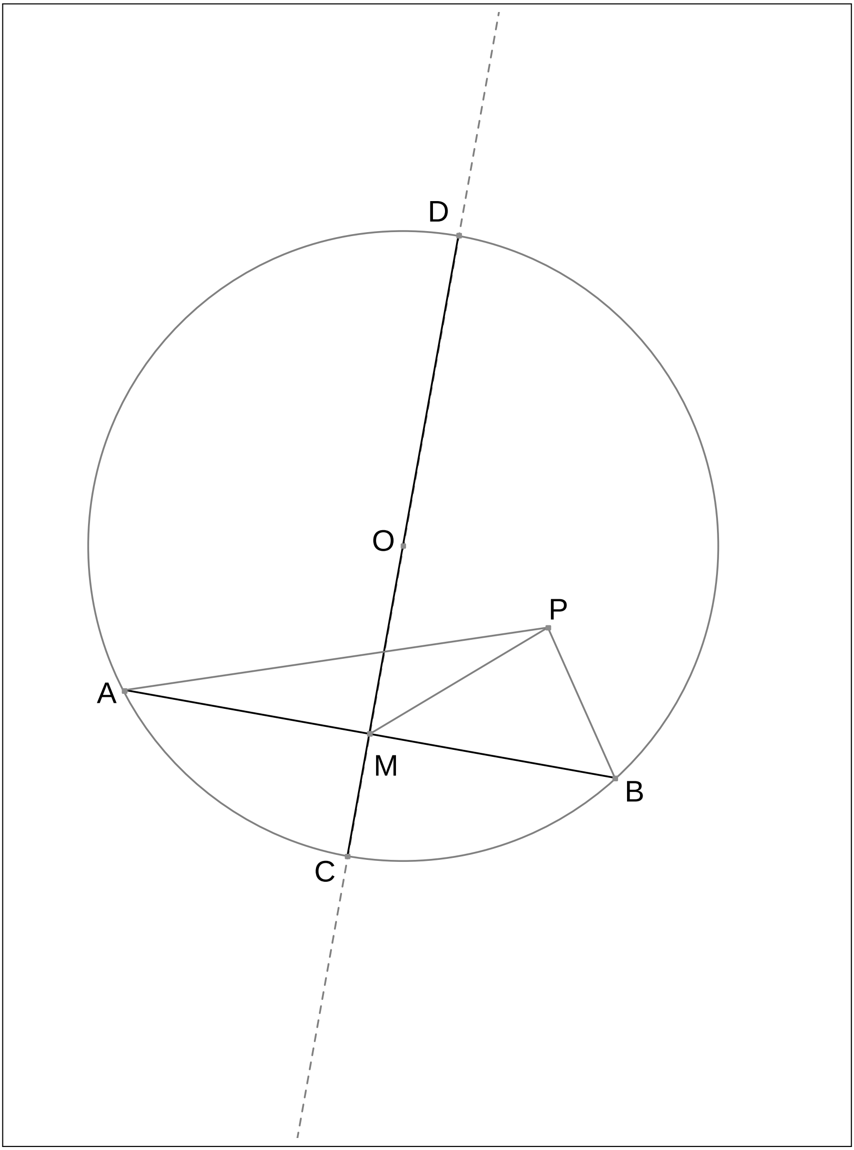

Figura 2: Determinazione del centro