PREFAZIONE

Solitamente, le rare opere scientifiche dell'antichità che sono giunte fino a noi rivestono solo un interesse storico. La maggior parte degli autori precedenti a Galileo viene studiata per conoscere l'evoluzione del pensiero, ma non perché quanto da loro affermato sia considerato valido ancor oggi. Leggiamo il *De Coelo* di Aristotele o il *Timeo* di Platone, ma niente di quanto è affermato in essi viene considerato corretto riguardo all'astronomia o alla chimica. Anche in quei pochi casi di argomentazioni accettate nella scienza moderna – come ad esempio la trattazione dell'equilibrio delle leve che fa Archimede – il modo in cui la teoria viene presentata è diverso da come era stata esposta dall'autore antico. Così, la procedura insegnata nelle scuole per la risoluzione delle equazioni di secondo grado è da un punto di vista epistemologico equivalente a quella che Al Khwarizmi descrive nell'*Algebra*, ma è completamente diversa da essa nei dettagli, essendo questa un procedimento basato sull'osservazione di proprietà di figure geometriche e quella una sequenza di passaggi di calcolo.

Non così per gli *Elementi* di Euclide. La geometria insegnata oggi nelle nostre scuole segue sostanzialmente una impostazione antica di 24 secoli; stessi teoremi e, in molti casi, anche stesse dimostrazioni. Naturalmente vi sono anche grosse differenze dovute al fatto che la sensibilità culturale moderna non è più quella dell'antica Grecia. In primo luogo si tratta di differenze linguistiche che rispecchiano differenze filosofiche (l'esempio più notevole in questo senso è quello della retta e del segmento: Euclide non distingue tra i due poiché l'infinito attuale non è ammesso, e quindi la differenza tra segmento e retta è che il primo ha limiti determinati mentre la seconda è ancora un segmento che però può essere prolungato indefinitamente). Vi sono poi differenze nella concezione degli enti e delle operazioni della geometria. Ad esempio, nelle costruzioni geometriche il segmento che rappresenta il raggio di una circonferenza deve sempre avere il centro di questa come uno dei suoi estremi, o, come talvolta scherzosamente si dice, il compasso di Euclide si chiude quando lo si stacca dal foglio. Ancora, negli *Elementi* un angolo è individuato dall'incontro di due linee di qualsiasi tipo – anche due archi di circonferenza o un arco e una retta (angolo curvilineo) – mentre noi oggi consideriamo angolo solo la parte di piano racchiusa da due semirette concorrenti. Ma è soprattutto nelle dimostrazioni che si osservano le maggiori differenze tra i moderni manuali di geometria e il testo originale di Euclide. Molte delle dimostrazioni che negli *Elementi* procedono per assurdo sono infatti state sostituite da dimostrazioni dirette. La motivazione di tale scelta è di carattere didattico. Infatti, non solo la dimostrazione per assurdo è spesso logicamente più complessa, ma richiede anche figure impossibili che mettono a dura prova le capacità di visualizzazione. Così, ad esempio, la seconda proposizione del terzo libro afferma che il segmento che unisce due punti qualsiasi di una circonferenza è tutto interno al cerchio. Questo teorema viene dimostrato per assurdo e richiede quindi di immaginare una corda che, almeno in una sua parte, passa esternamente alla circonferenza cui appartiene, cosa che è palesemente impossibile.

Lo scopo del presente lavoro è di riproporre il percorso della geometria seguendo una trattazione aderente alle originali argomentazioni di Euclide. Non si tratta di riscrivere gli *Elementi*, ma di rivisitare quei teoremi che sono considerati particolarmente importanti dal punto di vista didattico e vanno quindi a costituire l'ossatura dei programmi di geometria nelle nostre scuole. Per questo motivo vengono presi in considerazione anche aspetti storici, filosofici e filologici. Ciascuna dimostrazione viene dapprima presentata in maniera discorsiva, e successivamente, formalizzata secondo l'usuale schema in cui vengono evidenziati i vari passaggi e i legami logici tra di essi. Al termine di ogni capitolo viene proposto un certo numero di verifiche di comprensione e di problemi.

L'opera è strutturata in quattro volumi, il primo dei quali è dedicato alle proprietà fondamentali del triangolo e alle problematiche legate al parallelismo, cioè buona parte del primo libro.

LEZIONE 1

IL PRIMO LIBRO DEGLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE

1.1 La struttura logica della geometria

Il fondamentale salto di qualità operato dalla matematica greca rispetto alle altre culture contemporanee e precedenti (egizia, babilonese) consiste nel fatto di aver introdotto il procedimento deduttivo, in base al quale la verità di una proposizione viene stabilita sulla base di altre proposizioni, assunte come ipotesi e a loro volta considerate vere. Non si tratta più trovare risultati che valgono in determinati casi particolari, ma di costruire delle dimostrazioni.

Come esempio prendiamo un noto teorema il cui enunciato recita:

> **Se un triangolo ha due lati uguali, gli angoli opposti a tali lati sono uguali.**

Per la dimostrazione (che non è quella originale di Euclide, che vedremo più avanti nel testo, ma una semplificata) facciamo riferimento alla figura 1. L'ipotesi del teorema è che $AB = AC$, inoltre tracciamo la retta CH che divide a metà l'angolo (detta *bisettrice*). Ora, vi è altro teorema, precedentemente dimostrato, che afferma che due triangoli che hanno uguali rispettivamente una coppia di lati e l'angolo tra di essi compreso hanno uguali anche l'altro lato e i rimanenti due angoli. Osserviamo che possiamo applicare tale teorema ai triangoli *CHA* e *CHB*; essi hanno infatti il lato *CH*

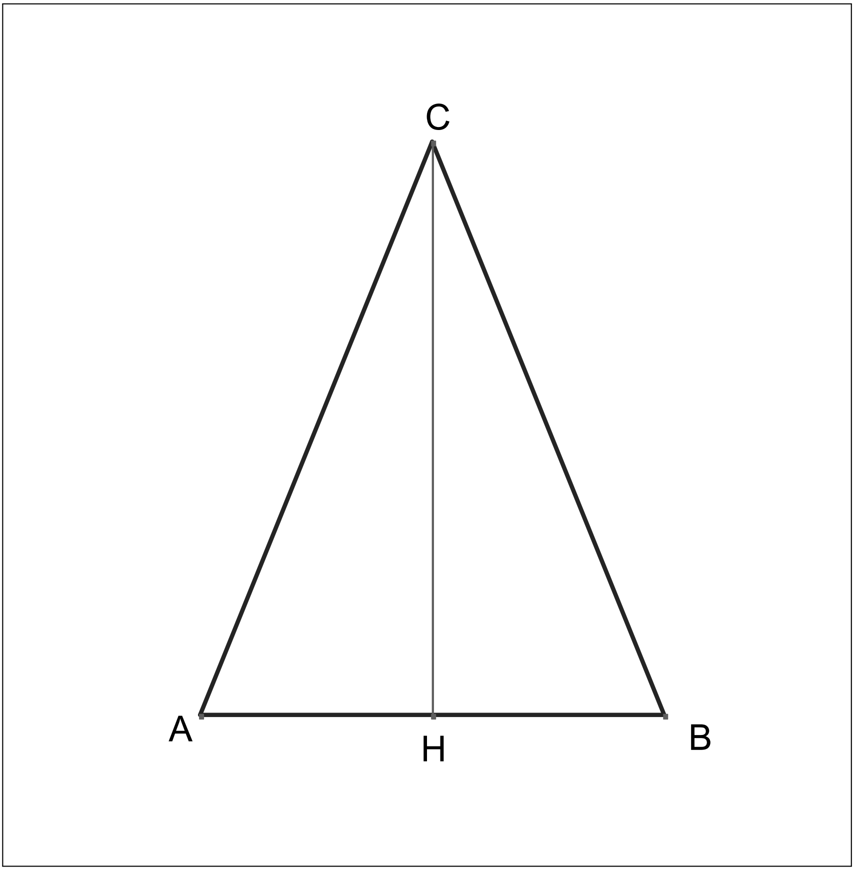

Figura 1: Un esempio di dimostrazione

in comune, $AB = AC$ per ipotesi e gli angoli $A\hat{C}H = B\hat{C}H$ per costruzione (in quanto CH è la bisettrice dell'angolo in C). Pertanto l'angolo in A è uguale all'angolo in B, che è ciò che volevamo dimostrare.

Analizzando il ragionamento seguito ci accorgiamo che il cuore delle dimostrazione consiste nel fatto di aver riconosciuto che ai triangoli che si vengono a formare per mezzo della bisettrice CH è possibile applicare il teorema, già dimostrato, che sancisce l'uguaglianza di due triangoli con uguali due lati e l'angolo compreso. Questo è un esempio di *sillogismo*. Un sillogismo è una costruzione logica formata da tre proposizioni: due premesse e una conclusione, come ad esempio nella deduzione: «*Tutti gli alberi hanno radici, le querce sono alberi, dunque le querce hanno radici*». Nella prima delle premesse – la cosiddetta *premessa maggiore* – si afferma che tutti gli elementi di una classe godono di una certa proprietà, nella seconda premessa (la *premessa minore*) si individua un soggetto che appartiene all'insieme della premessa maggiore, nella conclusione si riconosce che il soggetto della premessa minore gode della stessa proprietà di cui godono gli elementi della classe della premessa maggiore. Se le due premesse sono vere, anche la conclusione lo sarà.

Nel nostro esempio la premessa maggiore è il teorema ausiliario (*in tutte le coppie di triangoli aventi rispettivamente due lati e l'angolo compreso uguali anche l'altro lato e i rimanenti due angoli sono uguali*), mentre la premessa minore stabilisce che la particolare coppia di triangoli che si è venuta a formare con la nostra costruzione geometrica ha rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso. La conclusione sarà quindi che il soggetto della premessa minore (la coppia di triangoli venutasi a formare con la nostra costruzione geometrica) gode della proprietà espressa nella premessa maggiore (i due triangoli della coppia hanno uguali anche l'altro lato e i rimanenti due angoli).

1.2 Il problema della verità delle premesse

Nella dimostrazione vista sopra la verità della premessa minore è stabilita in base all'ipotesi e alla costruzione geometrica (AB e AC sono uguali per ipotesi, $A\hat{C}H = B\hat{C}H$

perché CH è la bisettrice, mentre CH è uguale a se stesso semplicemente per il principio di identità); ma chi garantisce la validità della premessa maggiore? Si tratta a sua volta un teorema, e quindi sarà vero in quanto dimostrato. Ma allora anche nella sua dimostrazione vi sarà una premessa maggiore da assumere come vera; ecco quindi che si ripropone nuovamente lo stesso problema. Fino a che punto possiamo spingerci a ritroso dimostrando le premesse, le premesse delle premesse, ecc.? È chiaro che ad un certo punto questa catena logica deve fermarsi con delle proposizioni che sono vere ma non dimostrate.

Vengono quindi stabilite alcune proposizioni la cui verità viene assunta senza dimostrazione; tali proposizioni vengono dette *postulati* e riguardano proprietà delle figure geometriche. Vi è anche un secondo gruppo di proposizioni, dette *nozioni comuni* e talvolta indicate anche come *assiomi*, che vengono ipotizzate vere senza essere dimostrate. A differenza dei postulati, però, le nozioni comuni non riguardano specificamente le figure geometriche ma hanno un carattere più generale. Naturalmente, prima di esporre i postulati e le nozioni comuni bisogna stabilire in maniera non ambigua il significato dei termini utilizzati. Per questo motivo, la costruzione del sistema dei teoremi deve iniziare con le *definizioni*.

1.3 Definizioni, postulati e assiomi del primo libro degli Elementi

Gli *Elementi* di Euclide sono forse l'opera più importante di tutta la storia della matematica. Essa tratta di geometria, ma anche di aritmetica e di quella che oggi chiameremmo algebra. Gli *Elementi* sono divisi in 13 libri, ognuno dei quali inizia con le definizioni, i postulati e gli assiomi che verranno utilizzati nella dimostrazione delle varie proposizioni. Ve ne sono alcuni brevi, come il secondo che consta di sole 14 proposizioni, ed altri lunghissimi, come il decimo, composto di ben 155 teoremi. La geometria del triangolo e dei poligoni più semplici, compresa la questione delle rette parallele è trattata nei primi due libri; il terzo e il quarto sono dedicati alla circonferenza e ai poligoni regolari; il quinto contiene la teoria delle proporzioni, che viene applicata alla geometria nel sesto libro. I libri dal settimo al decimo sono di natura aritmetica, mentre gli ultimi tre sono dedicati alla geometria solida.

Il primo libro è quello che contiene i teoremi più noti della geometria elementare; le definizioni, assiomi e postulati presentati nella sua parte iniziale sono concetti fondamentali alla base di tutta la successiva costruzione. Iniziamo quindi a vedere le definizioni del primo libro (riportiamo le definizioni in grassetto e accanto, tra parentesi, gli eventuali commenti):

1. **Punto è ciò che non ha parti** (il punto viene definito non tanto riguardo alla forma, come altri enti geometrici, ma piuttosto alla sua struttura, cioè è l'ente più semplice, che non può essere ulteriormente scomposto, come ad esempio il triangolo che è formato da linee...)
2. **Linea è lunghezza senza larghezza** (la linea è "lunghezza pura", senza altri attributi)
3. **Estremi di una linea sono i punti**
4. **Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti** (significa che non vi è modo di distinguere un punto da un altro in una retta, cosa che non accade con altre curve di forma più complicata)
5. **Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza** (questa definizione è analoga alla seconda, quella